

تطور جبر المجموعات

ظهرت المجموعات في عام ١٨٧٣ على يد فيلسوف الرياضيات جورج كانتور G. Cantor^١ الذي كان يهوى دراسة اللانهايات ويتساءل أي الأعداد أكثر: الأعداد الطبيعية أم الأعداد الحقيقية؟

وبفضل نظرية المجموعات أصبحت لغة الرياضيات أكثر بساطة ووضوحا ودقة، والمجموعة مفهوم بسيط نستخدمه في حياتنا اليومية مثل مجموعة المدن، مجموعة الدول، مجموعة الطلاب، مجموعة السيارات... كما نستخدمه في الرياضيات مثل مجموعة الأعداد الحقيقية، مجموعة الأعداد الطبيعية، مجموعة الأعداد الأولية... إلخ.

والرياضيات تهتم فقط بالمجموعات التي لها صفات محددة بدقة وتتألف من عناصر تجمع فيما بينها صفة عامة

{ جزرة - سيارة - بطة - كوكب }

{ تفاحة - قلم - كرة - وردة }

{ دراجة - خيط - ميزان - دجاجة }

هذه مجموعات لا تتمتع بخاصية محددة والرياضيات لا تهتم إلا بالمجموعات التي لها خاصية محددة وبدقة مثل:

{ مجموعة الأعداد الزوجية }

{ مجموعة الأعداد الفردية }

{ مجموعة الأعداد المثالية }

{ مجموعة الأعداد الأولية }

{ مجموعة الأعداد الزوجية إلى ١٠٠ }

.....ألخ

وتعريف المجموعة هو

زمرة (عدد من العناصر) تجمع فيما بينها صفة عامة

والأمثلة السابقة لمجموعات فضفاضة وغير محددة وتحتمل تصنيف ثان وثالث ورابع... إلخ

على سبيل المثال : مجموعة المدن

أي مدن

مجموعة المدن العربية

أي مدن عربية

^١ جورج كانتور وُلد في روسيا (١٨٤٥-١٩١٨) وعمل استاذًا في جامعة هَلْ بألمانيا

مجموعة المدن العربية الساحلية

أي مدن عربية ساحلية

مجموعة المدن العربية الساحلية الأفريقية

أي مدن عربية ساحلية أفريقية

مجموعة المدن العربية الساحلية الأفريقية على البحر المتوسط

وهكذا نجد ان مثل هذه المجموعات ليست موضوع الرياضيات

والرياضيات تهتم بالمجموعات التي تتمتع بصفات محددة بدقة وخاصة المجموعات اللانهائية، ويرجع ذلك إلى اهتمام جورج كانتور بدراسة فلسفة الرياضيات التي ليس لها نهاية

الاعداد الطبيعية لا نهائية

الاعداد الحقيقية ليس لها نهاية

مجموعة الأشعة

مجموعة التوابع

مجموعة الخواص

مجموعة البنى

كيف يكتب الرياضيون المجموعات؟

يعبر الرياضيون عن المجموعات بطريقتين: طريقة القائمة وطريقة الصفة المميزة

طريقة القائمة:

{ حيوان، نبات، جماد }

{ ٩ }

أي ان ما بين القوسين المعقوفين يمثل كل عناصر المجموعة ولا مجال للشك، ولكن هذه الطريقة لا تصلح للمجموعات التي تحوي عددا كبيرا من العناصر أو عدد عناصرها لا نهائي

كيف نكتب مجموعة عدد عناصرها مليون بهذه الطريقة؟

كيف نكتب مجموعة الاعداد الطبيعية بهذه الطريقة؟

طريقة الصفة المميزة

{ الصفة المميزة }

وهنا نثبت الصفة المميزة بين القوسين وأي عنصر يتمتع بهذه الصفة يكون من عناصر المجموعة

مثال : نكتب مجموعة الاعداد الطبيعية بطريقة القائمة هكذا

$$\{1,2,3,4,5, , \dots\}$$

ونكتبها بطريقة الصفة المميزة هكذا

$$\{N:n\text{-natural numbers}\}$$

حيث

N هي مجموعة الاعداد الطبيعية

n : تتمتع بخاصية عدد طبيعي

كيف نكتب مجموعة الاعداد الطبيعية الزوجية أقل من أو مساوية لـ 100

$$\{N:n\text{-even number} \leq 100\}$$

ما الفرق بين n و $\{n\}$

$\{n\}$ مجموعة مؤلفة من عنصر واحد

هل هناك مجموعة خالية من العناصر؟ نعم ونرمز لها بالرمز \emptyset

هل ممكن ان تحتوي مجموعة على مجموعات فرعية؟ نعم

$$\{\{m,o\},\{z,w\},\{y,x\}\}$$

هل يوجد مجموعة المجموعات؟

سؤال محير لم يجب عليه أحد حتى الآن

خصائص المجموعة الجزئية

كلما كانت المجموعة أكبر كلما كانت المجموعة الجزئية أكبر

لكل مجموعة مجموعة جزئية خالية ولكل مجموعة جزئية خالية مجموعة خالية إلى ما لا نهاية.

حالة غير عادية ولكنها ممكنة في عالم الرياضيات

مثال

$$\chi=\{y,z,w\}$$

المجموعات الجزئية لـ χ هي

$\Phi, \{y\}, \{z\}, \{w\}, \{y,z\}, \{y,w\}, \{z,w\}, \{y,z,w\}$

أي ثمان مجموعات

الانتماء للمجموعة \in

عدم الانتماء للمجموعة \notin

لا يوجد تطابق تام بين عناصر المجموعة وإنما يوجد صفة واحدة مشتركة

التعبير بالرسم لا يعبر تعبيراً دقيقاً عن المجموعات

التعبير عن المجموعات بالرموز الرياضية أدق وخاصة إذا كانت المجموعة لا نهائية

افضل تعبير عن المجموعات بالرسم هو مخطط فين Venn Diagram

تساوي المجموعتين يعني تماثل تام بين عناصر المجموعة الأولى وعناصر المجموعة الثانية والعناصر المتشابهة تعتبر عنصر واحد $\{3,4,5\} = \{3,3,4,5\}$ و $\{2\} = \{2,2,2,2\}$

كيف ننشأ مجموعات جديدة أو ما هي العمليات على المجموعات؟

التقاطع – الاتحاد – الفرق (المتمة)

التقاطع \cap

لننظر إلى تقاطع مستقيمين بنظرة جديدة!

إذا كانت منطقة تقاطع المستقيمين مكونة من نقطة واحدة فهي مجموعة مؤلفة من نقطة واحدة

أما إذا كانت منطقة تقاطع المستقيمين مكونة من عدة نقاط فهي مجموعة مكونة من عدة نقاط

انظر إلى المجموعتين

$X = \{1,2,3,4,5,6\}$

$Y = \{5,6,7,8,9\}$

نقطة التقاطع بين المجموعتين X و Y هي المجموعة $\{5,6\}$

الإتحاد \cup

الإتحاد لا يعني الجمع

ناتج الجمع دائما أكبر من الحدين

ناتج الإتحاد ليس بالضرورة أكبر من مجموع عناصر المجموعتين من الممكن ان يكون أقل

اتحاد المجموعة مع نفسها يعطي نفس عدد العناصر

متممة المجموعة / (الفرق بين المجموعتين)

$$X\{1,2,3,4,5\}$$

$$Y\{4,5,6,7\}$$

الفرق بينهما $X/Y = \{1,2,3\}$ وتسمى مجموعة الفرق

الطرح بين المجموعات عملية غير تبديلية

سؤال : متى يكون عدد عناصر المجموعة المتممة مساويا للفرق بين عدد عناصر المجموعتين؟

الإجابة عندما تكون المجموعة Y مجموعة جزئية لـ X

مثال : $Y \subseteq X$

$$X\{1,2,3,4,5,6,7\}$$

$$Y\{1,2,3\}$$

التطبيق

المتقابل {مجموعة الدول العربية} = {مجموعة عواصم الدول العربية}

{مجموعة الاعداد الزوجية} = {مجموعة الاعداد الفردية}

الغامر

المتباين

التطبيق في المجموعات اللانهائية